Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Superior
Prueba 2

Martes 2 de noviembre de 2021 (mañana)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

14 páginas

8821 – 7122

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 7]

En la academia de música de Lucy, ocho alumnos se presentaron al examen para el diploma de piano y obtuvieron puntuaciones sobre un máximo de 150 puntos. Para tener una referencia, Lucy decidió anotar el número promedio de horas por semana que cada alumno dijo haber practicado durante las semanas previas al examen. Estos resultados se resumen en la siguiente tabla.

Promedio de horas de práctica a la semana (h)	28	13	45	33	17	29	39	36
Puntuación obtenida en el diploma (D)	115	82	120	116	79	101	110	121

(a) Halle el coeficiente de correlación momento-producto de Pearson (r) para estos datos. [2]

(b) La relación que existe entre estas variables se puede modelizar mediante la ecuación de regresión $D = ah + b$. Escriba el valor de a y el valor de b. [1]

(c) Uno de estos ocho alumnos quedó defraudado con el resultado obtenido y se arrepintió de no haber practicado más. Basándose en los datos del enunciado, determine cómo cabe esperar que hubiera cambiado su puntuación si hubiera practicado cinco horas más por semana. [2]

(d) Lucy afirma que el número de horas que practica un alumno tiene un efecto directo sobre el resultado final que obtiene en el diploma. Comente la validez de la afirmación de Lucy. [1]

Lucy sospecha que los alumnos no practicaron tanto como dijeron. Con el fin de compensar este hecho, Lucy resta un número fijo de horas por semana a las horas que anotó para cada uno de los alumnos.

(e) Indique cómo se verá afectado el valor de r (si es que se ve afectado de algún modo). [1]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

2. [Puntuación máxima: 5]

Considere el triángulo ABC, donde $\mathrm{AC} = 12$, $\mathrm{CB} = 7$ y $\mathrm{B\hat{A}C} = 25^{\circ}$.

Halle el menor perímetro posible del triángulo ABC.

3. [Puntuación máxima: 7]

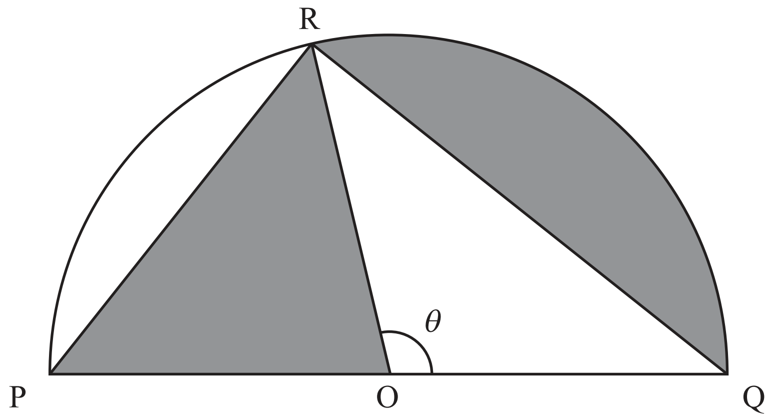
Hay una fábrica donde se producen lámparas. Se sabe que la probabilidad de que una lámpara salga defectuosa es igual a $0{,}05$. Se analiza una muestra aleatoria compuesta por 30 lámparas.

(a) Halle la probabilidad de que en la muestra haya al menos una lámpara defectuosa. [3]

(b) Sabiendo que en la muestra hay al menos una lámpara defectuosa, halle la probabilidad de que haya como mucho dos lámparas defectuosas. [4]

4. [Puntuación máxima: 6]

La siguiente figura muestra un semicírculo de centro O y radio r. Los puntos P, Q y R pertenecen a la circunferencia del círculo, de modo tal que $\mathrm{PQ} = 2r$ y $\mathrm{R\hat{O}Q} = \theta$, donde $0 < \theta < \pi$.



(a) Sabiendo que las áreas de las dos regiones sombreadas son iguales, muestre que $\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$. [5]

(b) A partir de lo anterior, determine el valor de θ. [1]

5. [Puntuación máxima: 9]

La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica viene dada por $S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{2}{3}\left(\frac{7}{8}\right)^r$.

(a) Halle el primer término de la progresión (u_1). [2]

(b) Halle S_∞. [3]

(c) Halle el valor más pequeño de n para el que se cumple que $S_\infty - S_n < 0{,}001$. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. [Puntuación máxima: 8]

(a) Demuestre la identidad $(p+q)^3 - 3pq(p+q) \equiv p^3 + q^3$. [2]

La ecuación $2x^2 - 5x + 1 = 0$ tiene dos raíces reales, α y β.

Considere la ecuación $x^2 + mx + n = 0$, donde m, $n \in \mathbb{Z}$ y cuyas raíces son $\frac{1}{\alpha^3}$ y $\frac{1}{\beta^3}$.

(b) Sin resolver $2x^2 - 5x + 1 = 0$, determine el valor de m y el de n. [6]

7. [Puntuación máxima: 6]

Una variable aleatoria continua X tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \arccos x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$

La mediana de esta distribución es igual a m.

(a) Determine el valor de m. [2]

(b) Sabiendo que $P(|X - m| \le a) = 0{,}3$, determine el valor de a. [4]

8. [Puntuación máxima: 8]

Considere la curva C que viene dada por $y = x - xy\ln(xy)$, donde $x > 0$, $y > 0$.

(a) Muestre que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\right)\left(1 + \ln(xy)\right) = 1$. [3]

(b) A partir de lo anterior, halle la ecuación de la tangente a C en el punto donde $x = 1$. [5]

No escriba soluciones en esta página.

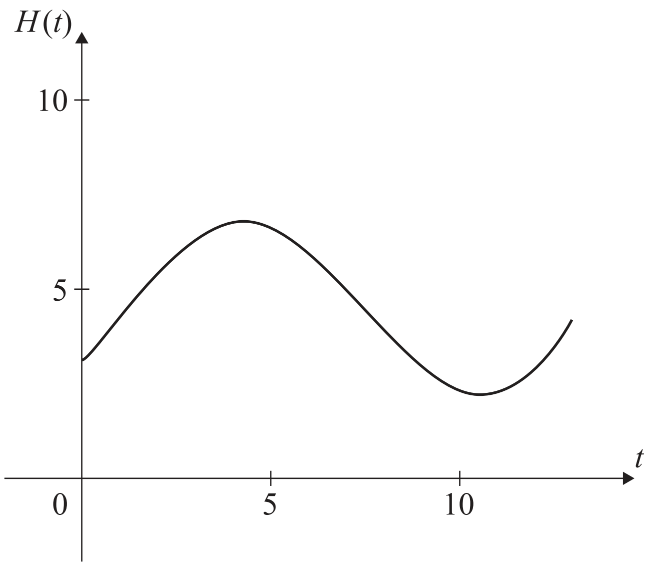
Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

9. [Puntuación máxima: 15]

En el puerto de Dungeness, la altura del agua (en metros) se puede modelizar mediante la función $H(t) = a\,\text{sen}\big(b\,(t - c)\big) + d$, donde t es el número de horas transcurridas desde la medianoche, y a, b, c y d son constantes, con $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$.

En el siguiente gráfico se representa la altura del agua a lo largo de 13 horas, empezando a medianoche.



La primera marea alta sucede a las 04.30 y la siguiente marea alta sucede 12 horas más tarde. A lo largo del día, la altura del agua va fluctuando entre los $2{,}2\,\text{m}$ y los $6{,}8\,\text{m}$.

Todas las alturas se dan redondeando a una cifra decimal.

(a) Muestre que $b = \frac{\pi}{6}$. [1]

(b) Halle el valor de a. [2]

(c) Halle el valor de d. [2]

(d) Halle el menor valor posible de c. [3]

(e) Halle cuál será la altura del agua a las 12.00. [2]

(f) Determine durante cuántas horas, a lo largo de un período de 24 horas, la altura de la marea supera los 5 metros. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 9: continuación)

Un pescador observa que, en el cercano puerto de Folkestone, la altura del agua sigue el mismo patrón sinusoidal que en el puerto de Dungeness, salvo que las mareas altas (y las mareas bajas) suceden 50 minutos antes que en Dungeness.

(g) Halle una ecuación apropiada que sirva para modelizar la altura del agua en el puerto de Folkestone. [2]

10. [Puntuación máxima: 18]

Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2-x-12}{2x-15}$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq\dfrac{15}{2}$.

(a) Halle las coordenadas de los puntos donde el gráfico de f corta al:

(i) Eje x

(ii) Eje y [3]

(b) Escriba la ecuación de la asíntota vertical del gráfico de f. [1]

(c) La asíntota oblicua del gráfico de f se puede escribir como $y=ax+b$, donde a, $b\in\mathbb{Q}$.

Halle el valor de a y el valor de b. [4]

(d) Dibuje aproximadamente el gráfico de f para $-30\leq x\leq 30$, indicando claramente los puntos de intersección con cada eje y todas las asíntotas que haya. [3]

(e) (i) Exprese $\dfrac{1}{f(x)}$ en fracciones parciales.

(ii) A partir de lo anterior, halle el valor exacto de $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$, expresando la respuesta como un único logaritmo. [7]

No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 21]

Los tres puntos $\mathrm{A}(3\,,0\,,0)$, $\mathrm{B}(0\,,-2\,,0)$ y $\mathrm{C}(1\,,1\,,-7)$ pertenecen al plano Π_1.

(a) (i) Halle el vector $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ y el vector $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

(ii) A partir de lo anterior, halle la ecuación de Π_1, expresando la respuesta en la forma $ax + by + cz = d$, donde $a\,, b\,, c\,, d \in \mathbb{Z}$. [7]

El plano Π_2 tiene por ecuación $3x - y + 2z = 2$.

(b) La recta L es la intersección de Π_1 y Π_2. Verifique que la ecuación vectorial de L se puede escribir así: $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. [2]

(c) El plano Π_3 viene dado por $2x - 2z = 3$. La recta L y el plano Π_3 se cortan en el punto P.

(i) Muestre que, para el punto P, $\lambda = \dfrac{3}{4}$.

(ii) A partir de lo anterior, halle las coordenadas de P. [3]

(d) El punto $\mathrm{B}(0\,,-2\,,0)$ pertenece a L.

(i) Halle la simetría del punto B respecto al plano Π_3.

(ii) A partir de lo anterior, halle la ecuación vectorial de la recta que se obtiene cuando se realiza una simetría de L respecto al plano Π_3. [9]

Fuentes:

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.